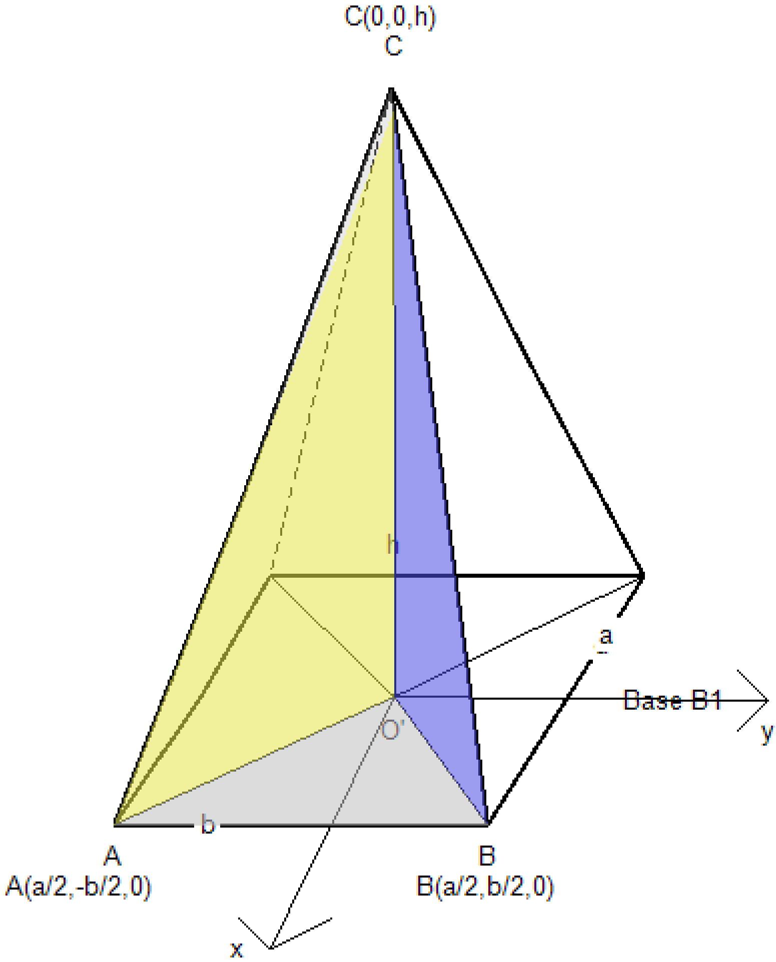
FORMULES POUR LE CALCUL D'AIRE ET VOLUME

CALCUL DE VOLUME

1)Calcul du volume d'une pyramide :



Calculons le volume du tétraèdre (OABC)

$V = \iiint dxdydz = \iint_{Plan\ OAB} dxdy \int_{M\in Plan\ ABC} dz$

$Soit\ \vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \left(bh, 0, \frac{ab}{2}\right) un\ vecteur\ normal\ au\ plan\ ABC$

$M(x, y, z) \in P(ABC)\ \ si\ \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{a}{2}\right).bh + z.\frac{ab}{2} = 0 \Leftrightarrow z = 2h *$
$(\frac{1}{2} - \frac{x}{a})$

On a donc V=$\int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_{OA\leq y\leq OB} dy \int_0^{z=2h(\frac{1}{2}-\frac{x}{a})} dz$

$M(x,y) \in OA \Rightarrow \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}\ colinéaires \Rightarrow \det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x & \frac{a}{2} \\ y & -\frac{b}{2} \end{vmatrix} = 0$

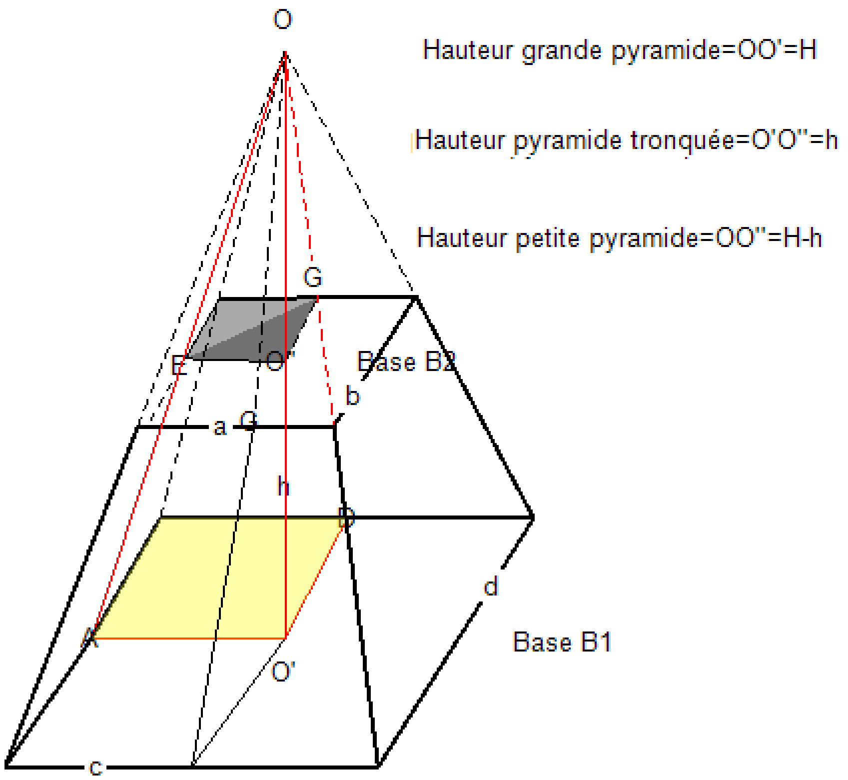
$\Rightarrow y = -\frac{b}{a}x \quad de\ même\ M(x,y) \in OB \Rightarrow y = \frac{b}{a}x$

V=$\int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{bx}{a}}^{\frac{bx}{a}} dy \int_0^{z=2h(\frac{1}{2}-\frac{x}{a})} dz \quad le\ calcul\ donne\ V = \frac{hab}{12}$

Le calcul pour les trois autres tétraèdres donne pour chacun $V = \frac{hab}{12}$

Le volume de la pyramide est égal à :$4 * \frac{hab}{12} = \frac{hab}{3} = \frac{h*B}{3}\ ou\ B = base\ de\ la\ pyramide$

2)Calcul du volume V du tronc d'une pyramide :



Application du théorème de Thalès aux triangles en rouge (AOO') et (O'OD) ;

$$\frac{OE}{OA}=\frac{OO"}{OO\prime}=\frac{EO"}{AO\prime}\Rightarrow\frac{H-h}{H}=\frac{EO"}{AO\prime}\qquad(1)$$

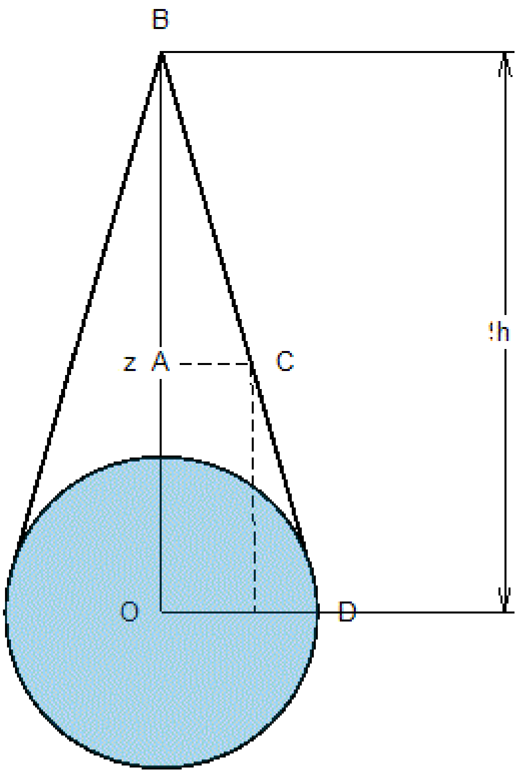
$$\frac{OO"}{OO\prime}=\frac{OG}{OD}=\frac{O"G}{O\prime D}\Rightarrow\frac{H-h}{H}=\frac{O"G}{O\prime D}\qquad(2)$$

(1)*(2)⇒ $(\frac{H-h}{H})^2=\frac{EO"}{AO'}*\frac{O"G}{O'D}=\frac{\frac{B2}{4}}{\frac{B1}{4}}=\frac{B2}{B1}\Rightarrow\frac{H-h}{H}=\frac{\sqrt{B2}}{\sqrt{B1}}\Rightarrow H=\frac{\sqrt{B1}}{\sqrt{B1}-\sqrt{B2}}h$

Volume V=Volume de la grande pyramide base B1-Volume de la petite pyramide base B2

$Volume\ V=\frac{1}{3}$H*B1-$\frac{1}{3}$(H-h)*B2=$\frac{1}{3}h\frac{\sqrt{B1}*B1-\sqrt{B2}*B2}{\sqrt{B1}-\sqrt{B2}}$=$\frac{1}{3}h\frac{\sqrt{B1}*B1-\sqrt{B2}*B2}{B1-B2}*$ $(\sqrt{B1}+\sqrt{B2})\Rightarrow V=\frac{1}{3}h(B1+B2+\sqrt{B1*B2})=\frac{1}{3}h(cd+ab+\sqrt{abcd})$

3)Volume d'un cône:



$V=\iiint dxdydz\qquad en\ coordonnées\ polaires\ x=rcos(\theta)\quad y=rsin(\theta)$

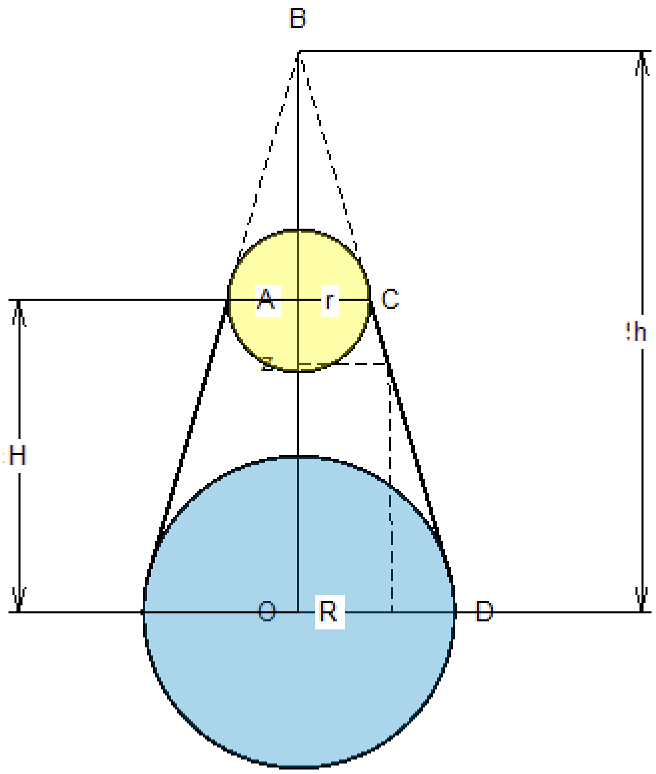
$$Le\ Jacobien\ J=\begin{vmatrix}\cos(\theta) & -rsin(\theta) & 0\\ \sin(\theta) & rcos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r$$

$$V=\iiint rdrd\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R rdr\int_0^z dz$$

Théorème de Thalès $\frac{BA}{BO}=\frac{AC}{OD}\Rightarrow\frac{h-z}{h}=\frac{r}{R}\Rightarrow z=h(1-\frac{r}{R})$

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R rdr\int_0^z dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r*h*\left(1-\frac{r}{R}\right)dr\Rightarrow V=\frac{\pi hR^2}{3}$$

4)Volume d'un tronc de cône :



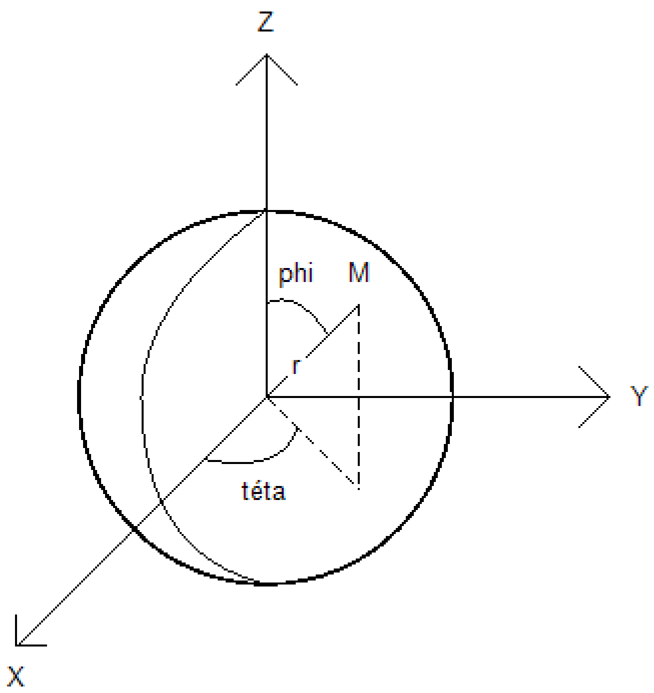
Volume du cône tronqué=volume du cône de hauteur h – volume du petit cône (h-H)

$$V=\frac{\pi hR^2}{3}-\frac{1}{3}\pi r^2*(h-H)$$

Théorème de Thalès : $\frac{BA}{BO}=\frac{AC}{OD}\Rightarrow\frac{h-H}{h}=\frac{r}{R}\Rightarrow h=\frac{RH}{R-r}$

$$V=\frac{1}{3}\pi(R^2-r^2)*\frac{RH}{R-r}+\frac{1}{3}\pi r^2H\Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+r^2+rR)$$

5)Volume d'une boule sphérique :



$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

$\boldsymbol{V = \iiint dxdydz}$

$x = rsin(\varphi)\cos(\theta)$

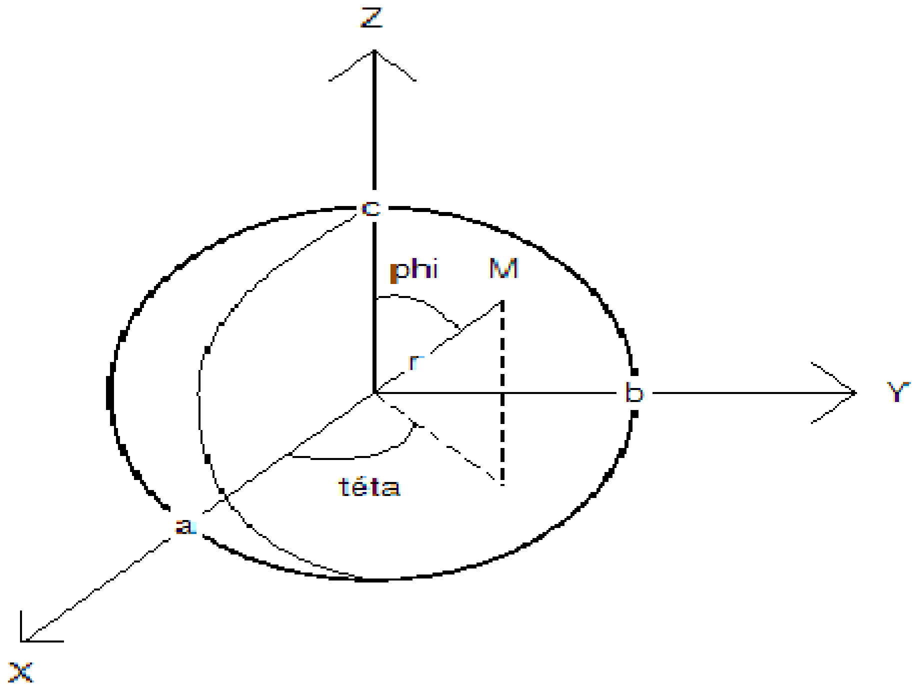
$y = rsin(\varphi)\sin(\theta)$

$z = rcos(\varphi)$

$$\text{Jacobien}=\begin{vmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & rcos(\varphi)\cos(\theta) & -rsin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & rcos(\varphi)\sin(\theta) & rsin(\varphi)\sin(\theta) \\ \cos(\varphi) & -rsin(\varphi) & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin(\varphi)$$

$V = \iiint dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} sin(\varphi)d\varphi \int_0^R r^2dr \Rightarrow \boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$

<u>6)Volume d'un ellipsoide :</u>



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$

Changement de variable $u = \frac{x}{a}$ $\quad v = \frac{y}{b}$ $\quad w = \frac{z}{c}$

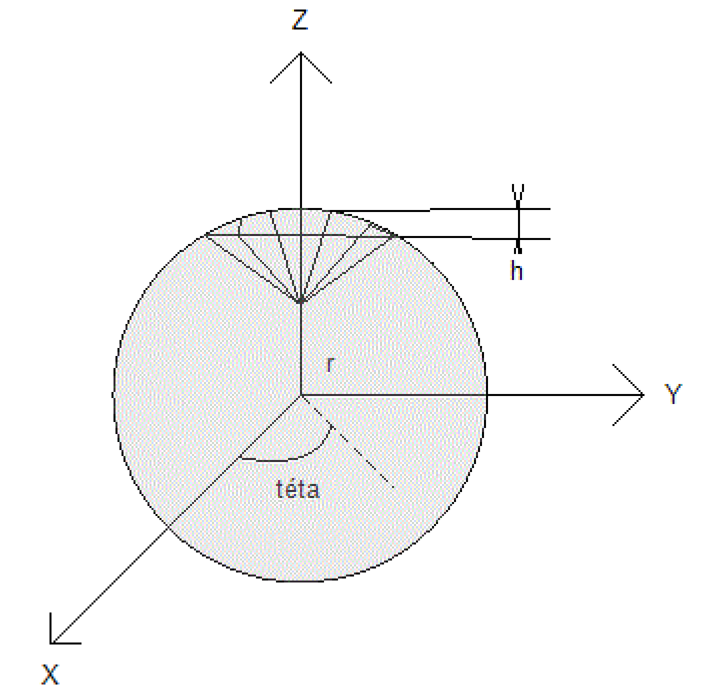
Jacobien=$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$

$V = \iiint (u^2 + v^2 + w^2)(abc)dudvdw = abc \iiint (u^2 + v^2 + w^2)dudvdw$

On est ramené au calcul d'une sphère de rayon 1

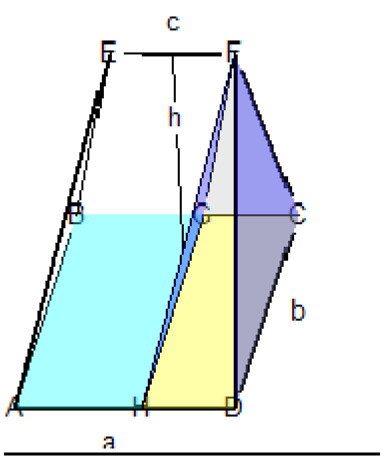
$V = abc * \frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi abc$

<u>7)Volume d'un secteur sphérique :</u>



$$V = \iiint dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2\, dr \int_0^{\mathrm{acos}(\frac{R-h}{R})} \sin(\varphi)\, d\varphi \Rightarrow V = 2\pi \frac{R^2 h}{3}$$

8)Volume d'une cale:

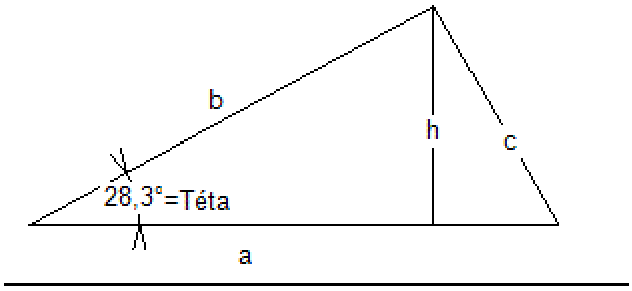


Volume V de la cale (ABCDEF)=Volume du ½ parallélépipède (ABCHEF) de hauteur h + Volume de la pyramide(HDGCF) de hauteur h et de base B=(a-c)*b

$$V = \frac{h}{2} * bc + \frac{1}{3} h(a-c) * b = \frac{hb(c+2*a)}{6}$$

CALCUL D'AIRE

1) Aire d'un triangle

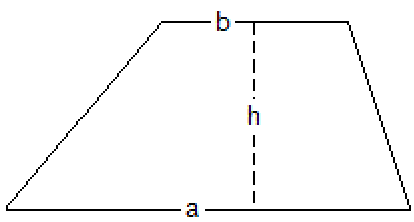


a)$S = \frac{1}{2} * a * h$

b)$S = \frac{1}{2} * a * b * \sin\theta$

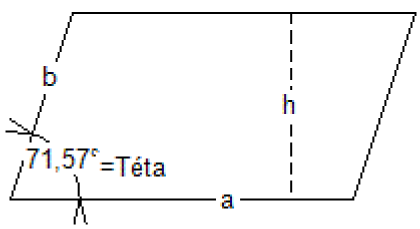
c)$S = \sqrt{s(s-a) * (s-b) * (s-c)}$ avec$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

2) Aire d'un trapèze



$$S = (a+b) * \frac{h}{2}$$

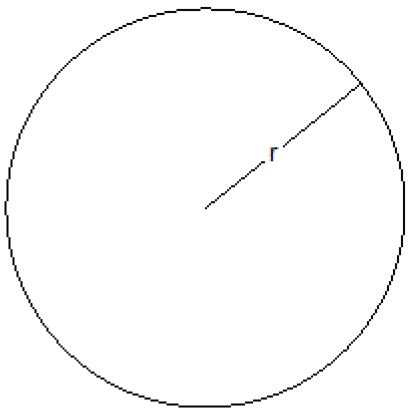
3) Aire d'un parallélogramme



a) $S = a * h$

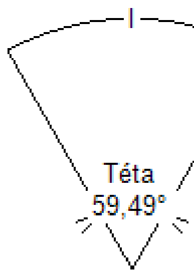
b) $S = a * b * \sin\theta$

4) Aire d'un cercle



$S = \pi * r^2$

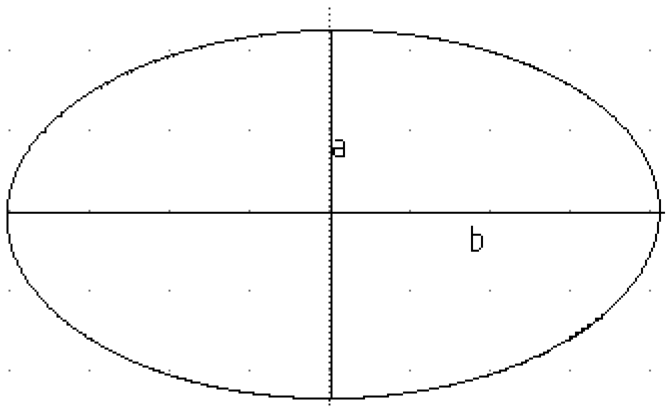
5) Aire d'un secteur :



a)$S = \frac{l*r}{2}$

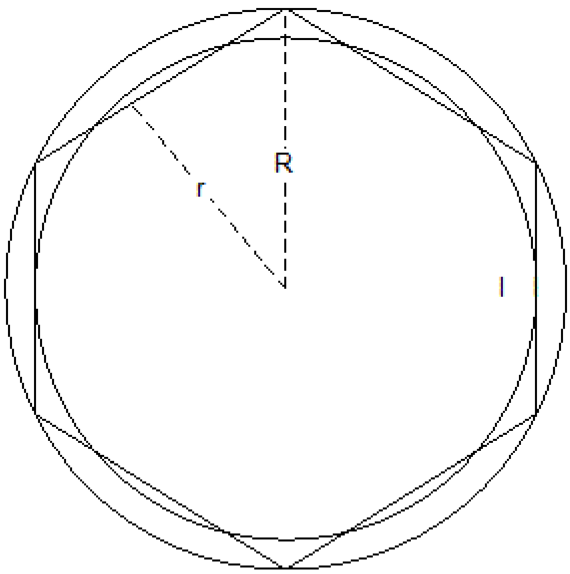
b)$S = \pi * r^2 * \frac{\theta}{360}$ $\quad avec\ \theta\ en\ degré$

6) Aire d'une ellipse :



$S = \pi * a * b$

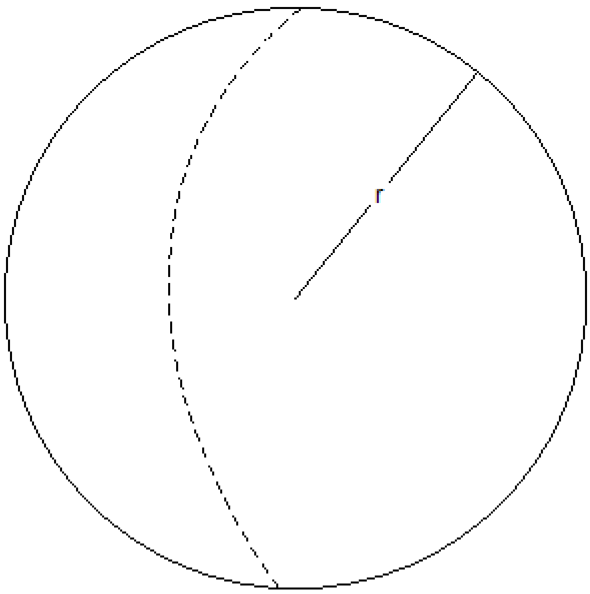
7) Aire d'un polygone :



$S = f(n,r) = n * r^2 * \tan(\frac{\pi}{n})$
$S = f(n,R) = \frac{1}{2} * n * R^2 * \sin(\frac{2*\pi}{n})$
$S = f(n,l) = \frac{1}{4} * n * l^2 * \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$ $\quad cot(x) = 1/tan(x)$

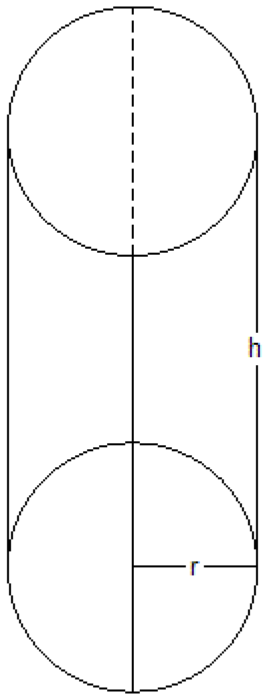
n est le nombre de côtés du polygone

8) Aire de la surface d'une sphère :



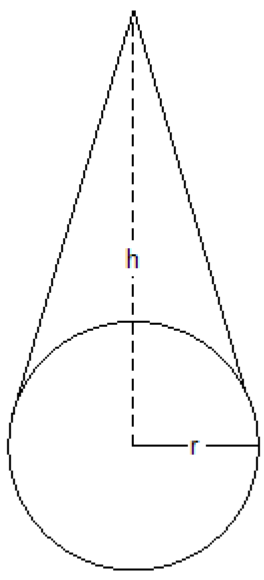
$S = 4 * \pi * r^2$

9) Aire de la surface d’un cylindre circulaire



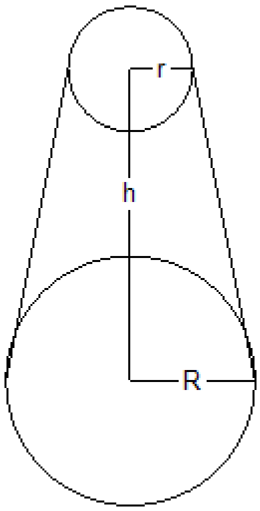
$$S = 2 * \pi * r * h + 2 * \pi * r^2$$

10) Aire de la surface d’un cône circulaire



$$S = \pi * r * \sqrt{r^2 + h^2} + \pi * r^2$$

11) Aire de la surface d’un tronc de cône circulaire



$$S = \pi * (R + r) * \sqrt{h^2 + (R - r)^2} + \pi * (R^2 + r^2)$$