

## Dans l'air :

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = m * \vec{g} \Rightarrow \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{g}$$

$$\vec{g} = (0, -g)$$

## Départ avec une vitesse initiale $V_x = v_0$ et $V_y = 0$ à $t = 0$ à la hauteur $y = H$ ;

On part avec un peu d'élan

$$\frac{dV_x}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_x = cte = v_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \quad \Rightarrow$$

$$x = v_0 * t + cte = v_0 * t$$

et

$$\frac{dV_y}{dt} = -g \quad \Rightarrow \quad V_y = -g * t + 0 = -g * t \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -g * t \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2} * g * t^2 + cte$$

à  $t = 0$   $x = 0$  et  $y = H$

$$x = v_0 * t$$

$$y = -\frac{1}{2} * g * t^2 + H$$

expression de la trajectoire  $y = f(x)$

$$t = \frac{x}{v_0}$$

$$y = -\frac{1}{2} * g * \frac{x^2}{v_0^2} + H$$

Application :  $H = 3$  m  $v_0 = 5$  km/h

$$y = -2,539 * x^2 + 3$$

Durée du saut dans l'air :

$$y = 0 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 * H}{g}} = 0,792 \text{ s}$$

Composante suivant  $Oy$  de la vitesse :  $V_y = -g * t = -\sqrt{2 * g * H}$

Vitesse de rentrer dans l'eau  $V$  :

$$V = \sqrt{1,39^2 + (-7,67)^2} \quad V = 7,8 \text{ m/s soit } 28 \text{ km/h}$$

Angle de rentrer dans l'eau :

$$\beta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = -79,7^\circ$$

**Départ avec une vitesse initiale  $V_x=V_{ox}$  et  $V_y=V_{oy}$  à  $t=0$  à la hauteur  $y=H$  ;**

Départ en plongeon suivant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale

$V_{ox}=V_0 \cdot \cos(\alpha)$  et  $V_{oy}=V_0 \cdot \sin(\alpha)$  ou  $V_0$  est le module du vecteur vitesse et  $\alpha$  l'angle du vecteur vitesse avec  $Ox$  au temps  $t=0$

$$\frac{dV_x}{dt} = 0 \Rightarrow V_x = V_0 \cdot \cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad x = V_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \quad \Rightarrow$$

et

$$\frac{dV_y}{dt} = -g \quad \Rightarrow \quad V_y = -g \cdot t + V_0 \cdot \sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -g \cdot t + V_0 \cdot \sin(\alpha) \quad \Rightarrow$$

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + V_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + H$$

On obtient la trajectoire en éliminant  $t$  ce qui donne :

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{V_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} + \tan(\alpha) \cdot x + H$$

Distance  $x=D$  de rentrée dans l'eau est obtenue en résolvant l'équation  $y=0$  ce qui donne :

$$D = \frac{V_0^2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha)}{2 \cdot g} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot g \cdot H}{V_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}}\right)$$

Application :

$$\alpha = 45^\circ \quad V_0 = 5 \text{ km/h} = 1,39 \text{ m/s} \quad H = 3 \text{ m}$$

on obtient  $D = 0,875 \text{ m}$

La trajectoire :

$$y = -5,08 \cdot x^2 + x + 3$$

Temps de rentrer dans l'eau :

$$t = \sqrt{\frac{x}{V_0 \cdot \cos \alpha}} = 0,89 \text{ s}$$

Vitesse de rentrer dans l'eau :

$$V_x = V_0 \cdot \cos(\alpha) = 0,983 \text{ m/s}$$

$$V_y = -g \cdot t + V_0 \cdot \sin(\alpha) = -7,748 \text{ m/s}$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = 7,81 \text{ m/s}$$

Calcul de l'angle  $\beta$  avec le plan d'eau de rentrer dans l'eau :

$$\tan(\beta) = \frac{V_y}{V_x} \Rightarrow \beta = -82,8^\circ$$

Pour une hauteur de saut de 25 m je trouve  $\beta = -87,5^\circ$

### Dans l'eau :

J'applique toujours le principe fondamental de la dynamique avec une vitesse initiale  $V_1$ ,  
Dans l'eau je tiens compte de la poussée d'Archimède et de la force de trainée dans l'eau,  
 $F_a = \rho * V_l * \vec{g}$

ou  $\rho$  = masse volumique de l'eau ( $\text{kg/m}^3$ )  
et  $V_l$  = volume du corps humain en  $\text{m}^3$

la force de trainée dans l'eau :

$$F_t = \frac{\rho * S * C_x * \vec{V}^2}{2}$$

### On a donc :

$$m * \frac{d\vec{V}}{dt} = m * \vec{g} - \rho * \vec{g} * V_l - \frac{\rho * S * C_x * \vec{V}^2}{2}$$

$$m * \frac{d\vec{V}}{dt} = m * \vec{g} - \rho * \vec{g} * V_l - \frac{\rho * S * C_x * V * \vec{V}}{2}$$

### en projetant sur Oy

$$m * \frac{d\vec{V} * \vec{j}}{dt} = m * \vec{g} * \vec{j} - \rho * V_l * \vec{g} * \vec{j} - \frac{\rho * S * C_x * V * \vec{V} * \vec{j}}{2}$$

ou  $\vec{j}$  est le vecteur unitaire dirigé vers la bas

$$m * \frac{dV_y}{dt} = m * g - \rho * g * V_l - \frac{\rho * S * C_x * \sqrt{V_x^2 + V_y^2} * V_y}{2}$$

$$\text{je note } A = \frac{\rho * S * C_x}{2 * m} \quad \text{et } B = g - \frac{\rho * g * V_l}{m}$$

Dans l'eau on a donc :

$$\frac{dV_y}{dt} = B - A * \sqrt{V_x^2 + V_y^2} * V_y$$

Considérons le cas  $V_x=0$  qui correspond à une rentrée dans l'eau à  $90^\circ$  du plan d'eau, On a vu précédemment que plus la Hauteur du saut est grande plus la valeur de  $\beta$  augmente et se rapproche de  $90^\circ$ , Le calcul que l'on va faire sera d'autant plus précis que l'on plonge d'une hauteur  $H$  élevée, J'applique toujours le principe fondamental de la dynamique avec une vitesse initiale  $V_y(t=0)=V_1$ ,

Résolution de l'équation différentielle  $y' = B - A * y^2$

$$\text{On pose } z = \sqrt{\frac{A}{B}} * y$$

$$\text{On a } z' = \sqrt{\frac{A}{B}} * y'$$

$$y' = B(1 - z^2)$$

$$z' = \sqrt{A * B}(1 - z^2)$$

$$\frac{z'}{1 - z^2} = \sqrt{A * B} \text{ (eq, 1)}$$

$$\text{une primitive de } \frac{z'}{1 - z^2} \text{ est : } \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| + C$$

$$\text{eq.1} \Rightarrow \frac{1}{2} * \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| = \sqrt{A * B} * t - C$$

$$\text{soit } \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| = 2 * \sqrt{A * B} * t - 2 * C$$

$$z = \frac{1 + \exp(f(t))}{-1 + \exp(f(t))}$$

$$\text{avec } f(t) = 2 * \sqrt{A * B} * t - 2 * C$$

Donc la vitesse  $V=y$  est égale à :

$$V_y(t) = \sqrt{\frac{B}{A}} * \frac{1 + \exp(2 * \sqrt{A * B} * t - 2 * C)}{-1 + \exp(2 * \sqrt{A * B} * t - 2 * C)}$$

La constante  $C$  se détermine avec la condition  $V(t=0)=V_1$  à l'entrée dans l'eau

je trouve  $C = \frac{-1}{2} * \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\frac{A}{B}} * V_1}{-1 + \sqrt{\frac{A}{B}} * V_1} \right)$

V(t) peut se mettre sous la forme :

$$V(t) = Vt * \frac{1 + \exp(2 * C) * \exp\left(-\frac{t}{T}\right)}{1 - \exp(2 * C) * \exp\left(-\frac{t}{T}\right)} = Vt * \frac{1 + K * \exp\left(-\frac{t}{T}\right)}{1 - K * \exp\left(-\frac{t}{T}\right)}$$

avec  $K = \frac{V_1 - Vt}{V_1 + Vt}$  et  $T = \frac{1}{2 * \sqrt{A * B}}$

On peut considérer que le régime permanent est atteint (V ne depend plus de t) au bout d'un temps  $t = 5 * T = 3,56$  s

**Calcul de la profondeur y atteinte dans l'eau :**

$$V = \frac{dy}{dt}$$

$$y = \int V(t) dt$$

$$y = \sqrt{\frac{B}{A}} * \int \frac{1 + \exp(a * t + b)}{-1 + \exp(a * t + b)} dt \quad \text{avec } a = 2 * \sqrt{A * B} \quad \text{et } b = -2C$$

en posant  $u = \exp(a * t + b)$

$$y = \sqrt{\frac{B}{A}} * \frac{1}{a} * \int \frac{1 + u}{u * (-1 + u)} * du$$

qui se décompose en fraction rationnelle et je trouve :

$$y(t) = \sqrt{\frac{B}{A}} * \left( -t + \frac{2}{a} \ln |\exp(a * t + b) - 1| \right) + cte$$

si on nomme D1 la constante

et si on prend  $y=0$  (surface de l'eau) à  $t=0$  je trouve  $D1 = -\sqrt{\frac{B}{A}} * \left( \frac{2}{a} \right) * \ln |e^b - 1|$

La profondeur y (t) à partir de la surface peut s'écrire :

$$y(t) = \sqrt{\frac{B}{A}} * \left( -t + \frac{2}{a} \ln |\exp(a * t + b) - 1| \right) + D1$$

avec  $D1 = \left(\frac{-1}{A}\right) * \ln \frac{2}{-1 + \sqrt{\frac{A}{B}} * V1}$  si on prend  $y=0$  à  $t=0$

$$b = -2 * C = \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\frac{A}{B}} * V1}{-1 + \sqrt{\frac{A}{B}} * V1} \right)$$

et

$$\underline{a} = 2 * \sqrt{A * B}$$

### Vitesse limite :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = Vt = \sqrt{\frac{B}{A}}$$

Application pour une hauteur de plongeur  $H=10$  m

données utilisées :

$$g=9,81 \quad \rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

Plongeur :

$$m=80 \text{ kg} \quad S=0,18 \text{ m}^2 \quad Cx=0,7 \quad V1=75 \text{ litres (données relevées sur internet)}$$

on calcule :

$$A=0,787 \quad B=0,625$$

$$C=-0,064 \quad D1=2,53$$

$$a=1,4 \quad b=0,127$$

On obtient :

$$V(t) = 0,89 * \frac{\exp(1,4 * t + 0,127) + 1}{\exp(1,4 * t + 0,127) - 1}$$

$$h(t) = y(t) = -0,89 * t + 1,271 * \ln |1,135 * e^{1,4 * t} - 1| + 2,53$$

la vitesse limite est égale à 0,89 m/s

On peut expliciter aussi la profondeur  $h(t)$  en fonction de  $V1$  ,

$$h(t) = -\sqrt{\frac{B}{A}} * t + \frac{1}{A} * \ln \left| \frac{-1 + \sqrt{\frac{A}{B}} * V1}{2} * (\exp(2\sqrt{A*B}*t - 2*C) - 1) \right| \dot{}$$

$$h(t) = -Vt * t + \frac{1}{A} * \ln \left( \frac{-1 + \frac{V1}{Vt}}{2 * K} * \exp\left(\frac{t}{T}\right) - K \right) = -Vt * t + \frac{1}{A} * \ln \left( \frac{V1 + Vt}{2 * Vt} * (\exp\left(\frac{t}{T}\right) - K) \right)$$

$$A = \frac{\rho * S * Cx}{2 * m} \quad \text{et} \quad B = g - \frac{\rho * g * V1}{m} \quad -2C = \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\frac{A}{B}} * V1}{-1 + \sqrt{\frac{A}{B}} * V1} \right)$$